

統計関連学会連合大会
@関西大学千里山キャンパス
2025年9月10日



プラズマ物理におけるベイズ統計の活用と発展

徳田 悟

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

tokuda@imi.kyushu-u.ac.jp

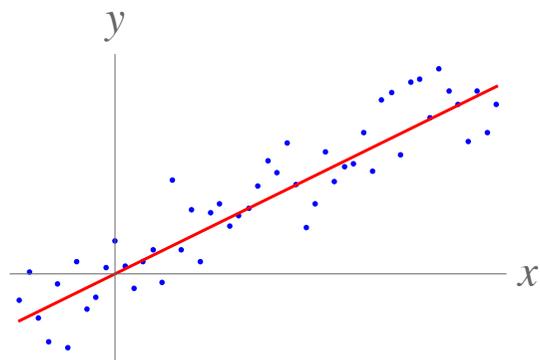
共同研究者 (研究当時の所属) :

荒川 弘之 (島根大)、居田 克巳 (NIFS)、稲垣 滋 (九大)、上原 日和 (NIFS)、
岡田 真人 (東大)、門 信一郎 (京大)、河内 裕一 (九大)、小林 達哉 (NIFS)、
佐々木 真 (日大)、三瓶 明希夫 (京工繊大)、高橋 裕己 (NIFS)、武村 勇輝 (NIFS)、
田中 謙治 (NIFS)、徳澤 季彦 (NIFS)、西澤 敬之 (九大)、寺坂 健一郎 (九大)、
永田 賢二 (東大)、長谷川 真 (九大)、藤澤 彰英 (九大)、舟場 久芳 (NIFS)、
安原 亮 (NIFS)、山崎 広太郎 (広島大)、山田 一博 (NIFS)、G. Grenfell (MPI)、
P. Manz (Greifswald大)

統計学と物理学の出会い：統計力学の形成

誤差論

(1800年代～)

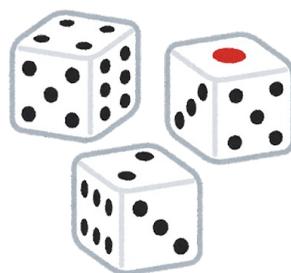


サンプル (データ)

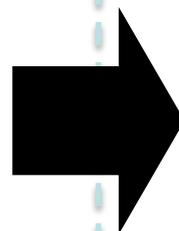
観測可能

不完全な測定に基づくデータ

【認識論】

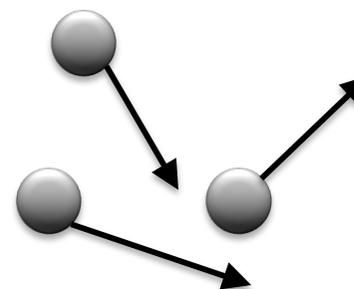


確率変数



統計力学

(1850年代～)



状態 (分子運動)

観測不可能

見えないがそこに在る真理

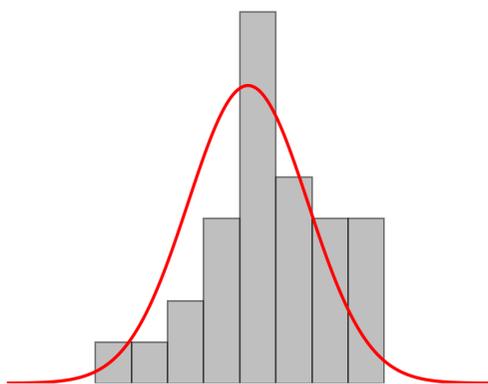
【存在論】

温度や圧力などの巨視的な測定量と分子運動の統計量の対応付け

統計学と物理学の別れ：20世紀のすれ違い

推計統計学

(1910年代～)

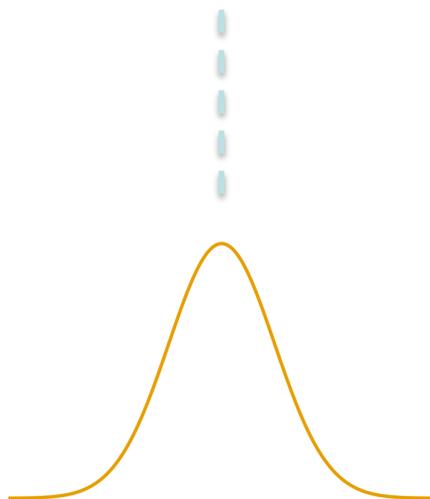


母数推定 / 密度推定

“間接的”な評価

サンプル → 推定

【認識論】

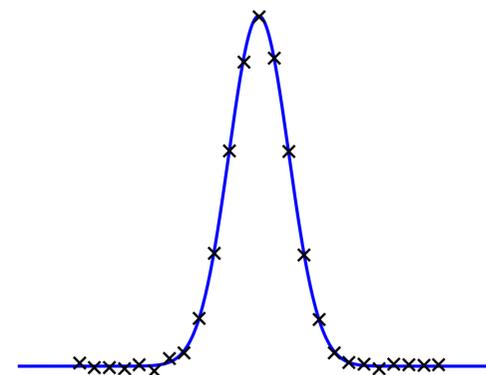


確率密度関数



量子力学

(1920年代～)



ドップラー分光法

“直接的”な測定

観測 → 実在

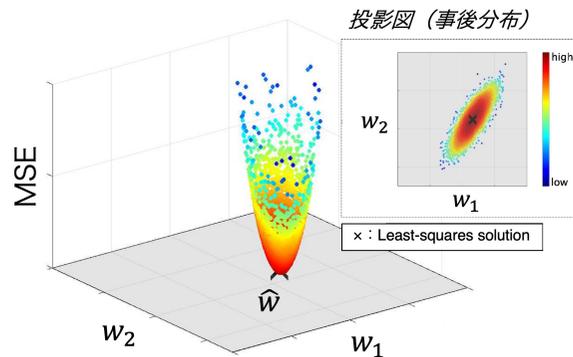
【存在論】

統計学は認識論、物理学は存在論としての色彩が顕著に

統計学と物理学の再会：ベイズ×プラズマ

ベイズ統計学

(1920年代～)



パラメータ/モデルの不確実性

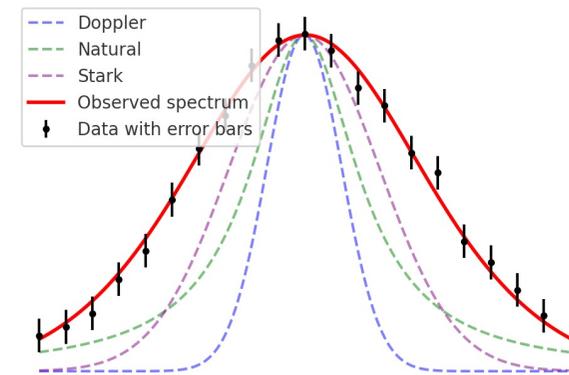
不確実性を含む“逆問題”

サンプル + 順問題 → 推定

【認識論】

プラズマ物理学

(1920年代～)



各種広がり & 観測ノイズ

測定の“順問題”

背後の関数 → 畳み込まれた像

【存在論】

回帰問題



階層的生成モデルの回帰問題は両分野の再会の地
— そして新たなフロンティア



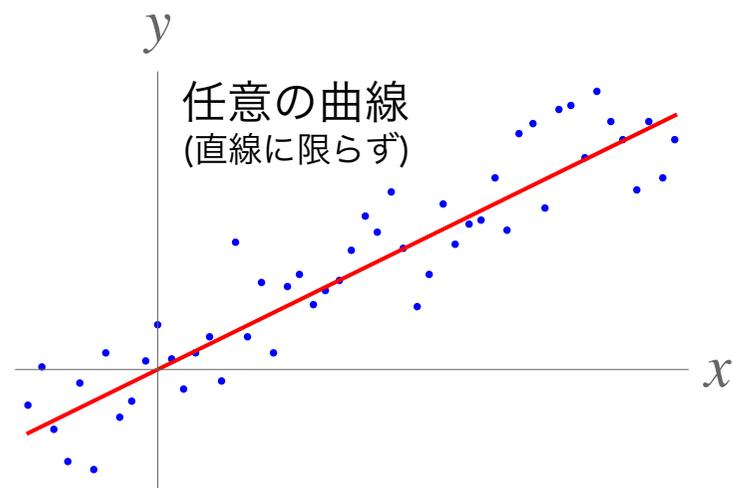
準備：ベイズ回帰の数理

－ パラメトリック回帰編 －

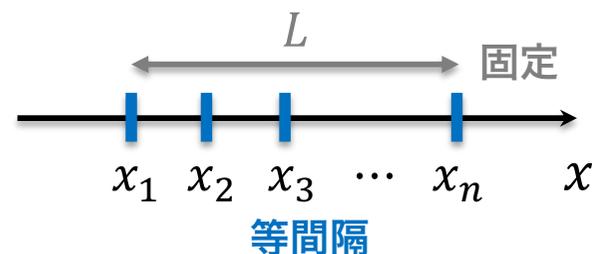
設定：加法性ガウスノイズを伴う観測

$$Y_i = f(x_i; w) + N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- $\{Y_i\}_{1:n}$: サンプル
 $Y_i = y_i$: 実現値 (計測データ)
- $x = x_i$: 計測点
 $x_i = x_{i-1} + L/(n-1)$
($L := x_n - x_1$ は固定)
- $f \in \{f_K\}$: x の任意関数
- w : f のパラメータセット
- N_i : 計測ノイズ
 $N_i \sim \mathcal{N}(0, \beta^{-1})$ ガウスノイズ
i.e., $Y_i \sim \mathcal{N}(f(x_i; w), \beta^{-1})$
 $\beta^{-1} > 0$: ノイズレベル (分散)



$Y_i | x_i$: 条件付き独立な確率変数

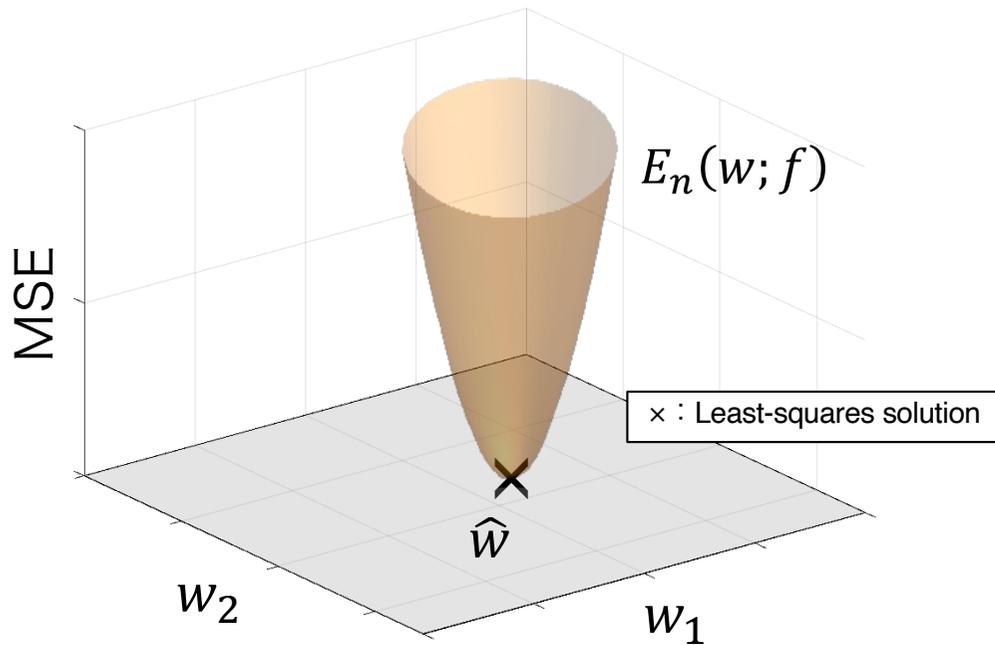


計測データはサンプル (ガウス分布に従う確率変数) の実現値

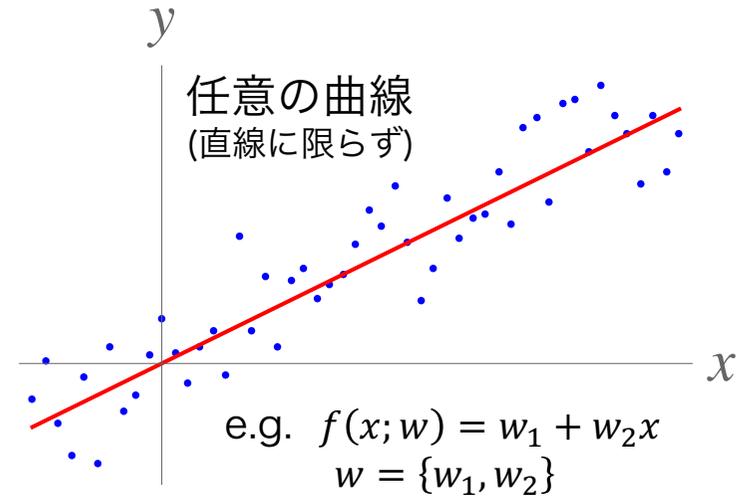
最小二乗法への再訪

$$E_n(w; f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Y_i - f(x_i; w)\}^2$$

平均二乗誤差 (MSE)



パラメータの”基底状態”



$$\hat{w} := \underset{w}{\operatorname{argmin}} E_n(w; f)$$

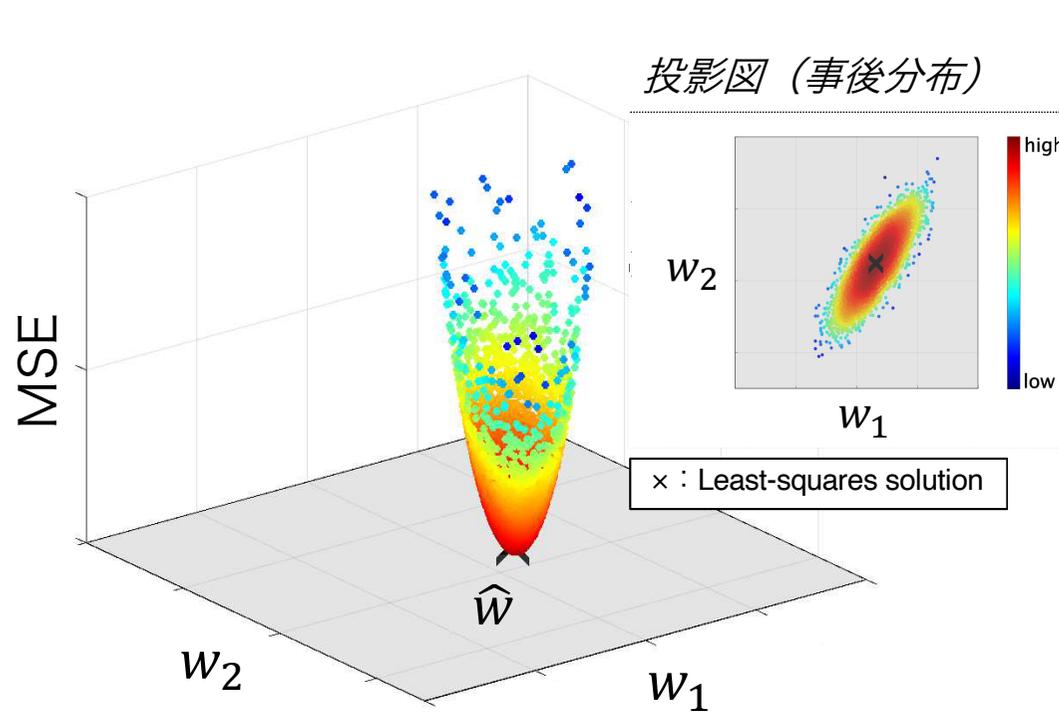
線形回帰の場合のみ解析解が得られる

得られたパラメータの“最適値”はどれくらい確実？

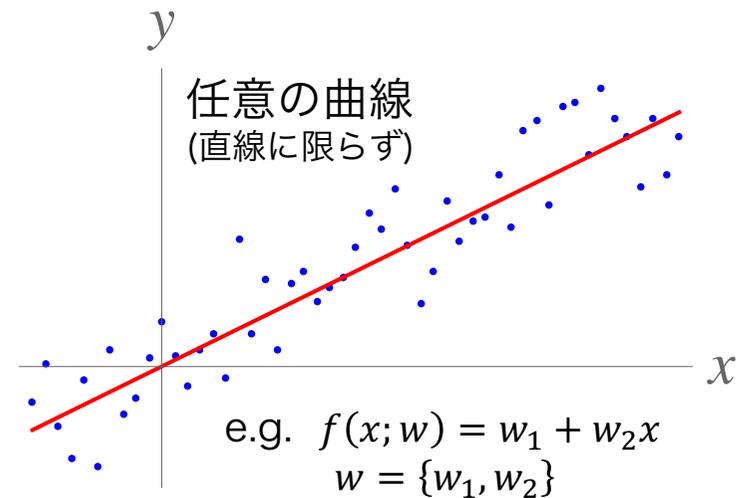
ベイズ推定に基づく回帰

$$E_n(w; f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Y_i - f(x_i; w)\}^2$$

平均二乗誤差 (MSE)



パラメータの“統計アンサンブル”



$$\hat{w} := \underset{w}{\operatorname{argmin}} E_n(w; f)$$

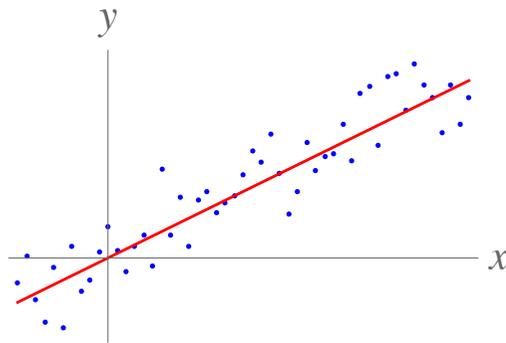
$$w \sim p(w | \{x_i, Y_i\}_{1:n}, f) \quad \text{事後分布}$$

パラメータを確率変数とみなす

分布するパラメータ値の不確実性定量化

確率モデルに基づく定式化

確率の連鎖律 $p(\{x_i, Y_i\}_{1:n}|w)p(w) = p(w|\{x_i, Y_i\}_{1:n})p(\{x_i, Y_i\}_{1:n})$



観測データの分布

$$Y_i \sim p(Y_i|x_i, w)$$

$$= \mathcal{N}(f(x_i; w), \beta^{-1})$$

$f(x_i; w)$: 回帰モデル

β^{-1} : ノイズレベル

n : データ数



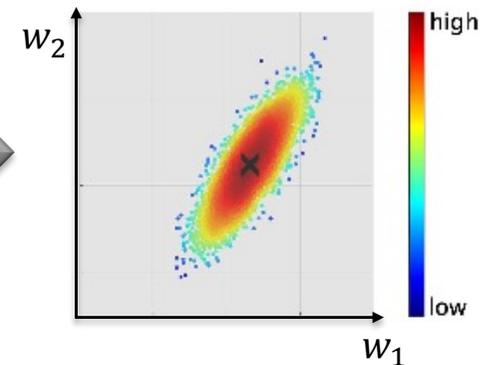
(条件付き) 独立性

$$p(\{x_i, Y_i\}_{1:n}|w) = \prod_{i=1}^n p(Y_i|x_i, w)$$

+

観測ノイズのガウス性

$$\prod_{i=1}^n p(Y_i|x_i, w) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{n\beta}{2} E_n(w; f)\right]$$



パラメータ値の分布

$$w \sim p(w|\{x_i, Y_i\}_{1:n})$$

$$\propto \exp\left[-\frac{n\beta}{2} E_n(w; f)\right] p(w)$$

$p(w)$: well-behavedな関数
[ほぼ平坦な関数を仮定]

$E_n(w; f)$: MSE

観測データからパラメータ値への“誤差伝搬”

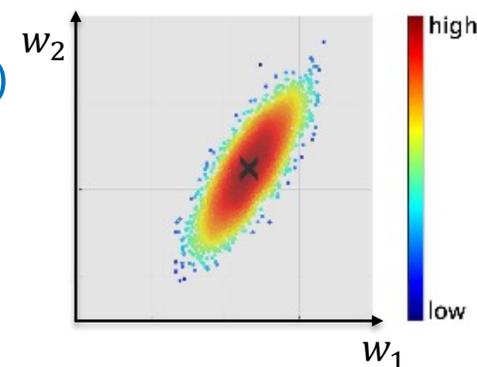
周辺化：回帰からモデル選択へ

回帰: $D^n := \{x_i, Y_i\}_{1:n}$ と f を固定した下で、 w を求める問題

パラメータ値の分布 $p(w|D^n, f) \propto p(D^n|w, f)p(w|f)$ (*)

尤度関数 $p(D^n|w, f) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{n\beta}{2} E_n(w; f)\right]$

$p(w|f)$: well-behavedな関数 $E_n(w; f)$: MSE β^{-1} : ノイズレベル



w の周辺化(積分) $p(f|D^n) = \int p(w|D^n, f)p(f)dw$

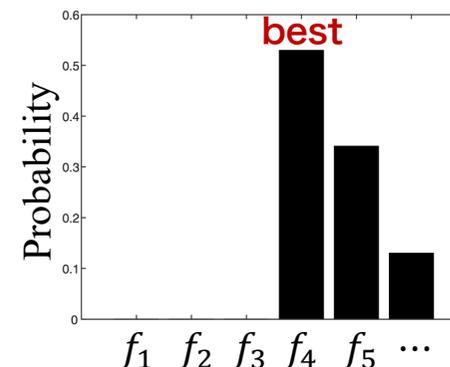
多くの場合において
解析的な取り扱いは困難

モデル選択: D^n を固定した下で、 $f \in \{f_1, f_2, \dots\}$ を求める問題

モデルの分布 $p(f|D^n) \propto p(D^n|f)p(f)$

周辺尤度 $p(D^n|f) = \int p(D^n|w, f)p(w|f)dw$

$p(f)$: $f \in \{f_k\}$ の離散一様分布 (*) の比例定数 (規格化定数)



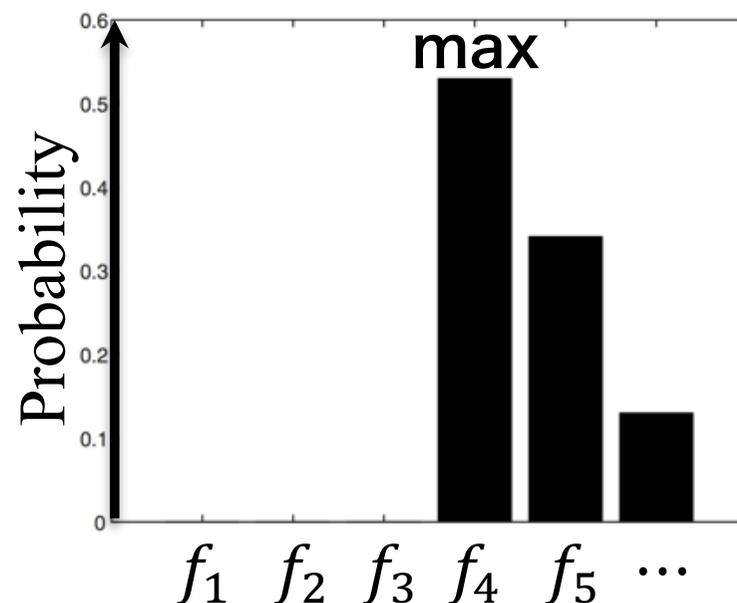
ベイズ的モデル選択

$$p(f|D^n) \propto p(D^n|f)p(f)$$

D^n : 観測データ

f : モデル

$p(f)$: $f \in \{f_1, f_2, \dots\}$ の
離散一様分布



“同様に確からしい”
→ 適当な事前知識
があれば代替可

$p(f|D^n)$ を最大化する f が妥当なモデル
(候補の中からの選択と不確実性定量化)

候補外は確率0という事前知識の導入

イオン速度分布関数のベイズ的モデル選択

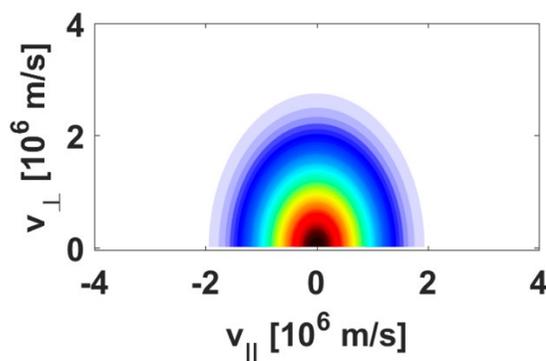
– 直線磁化プラズマの統計性を暴く –

1. ST, et al, “Bayesian inference of ion velocity distribution function from laser-induced fluorescence spectra”, *Sci. Rep.*, 11, 20810 (2021).
 - プレスリリース：“ベイズ推定を用いた速度分布関数の解析法を開発”
 - 支援：科研費(20K19889) 他

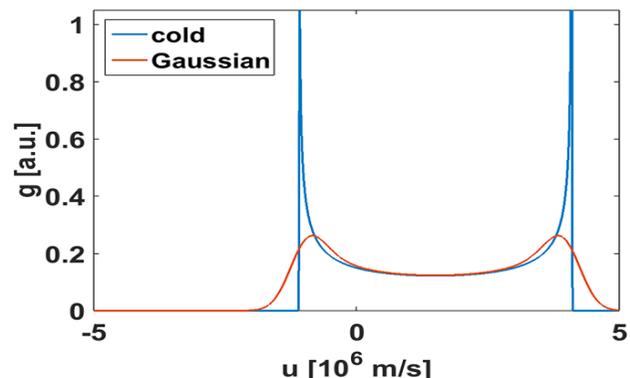
磁化プラズマにおけるイオン速度分布関数

[Moseev & Salewski, *Phys. Plasmas*, 2019]

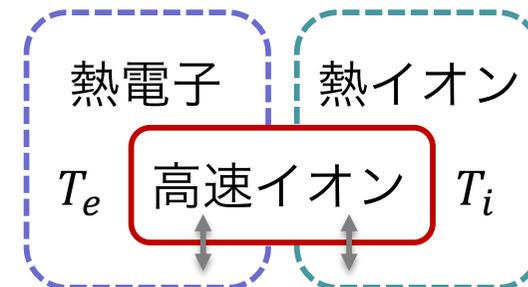
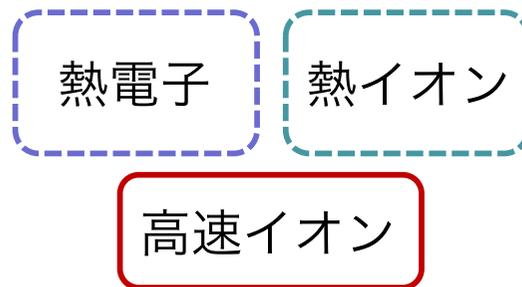
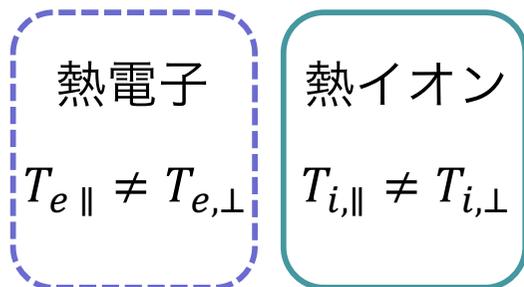
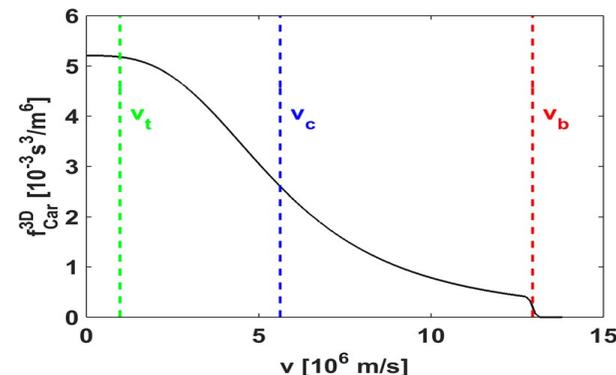
bi-Maxwellian



cold/warm ring



slowing-down



速度分布関数は着目系（と環境系）の巨視的な状態を反映
ただし、それを実験的に決定することは非自明な問題

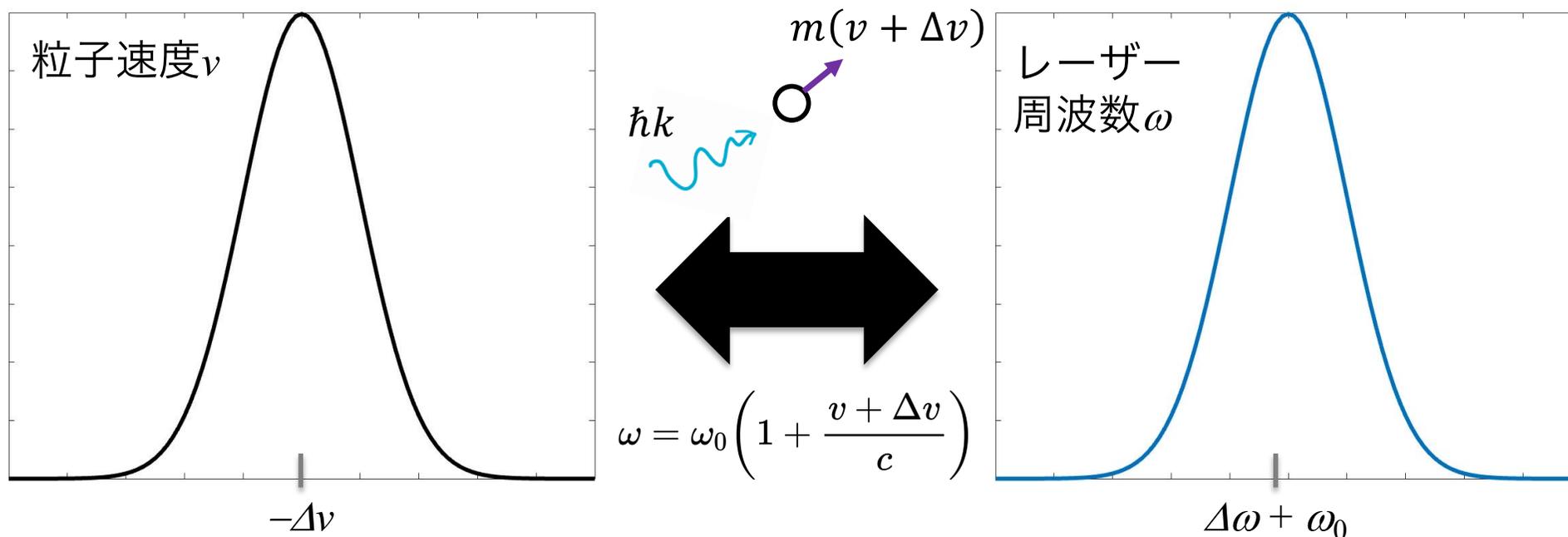
(多くの場合、粒子種ごとにbi-Maxwellianであることを「仮定」)

ドップラー効果を用いた速度分布関数の観測

Ex. マクスウェル分布

$$f(v) := n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2k_B T}\right)$$

$$f(\omega) := n \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi k_B T \omega_0^2}} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \Delta\omega - \omega_0)^2}{2k_B T \omega_0^2}\right)$$



Δv : バルク流速
(熱平衡系であれば0)

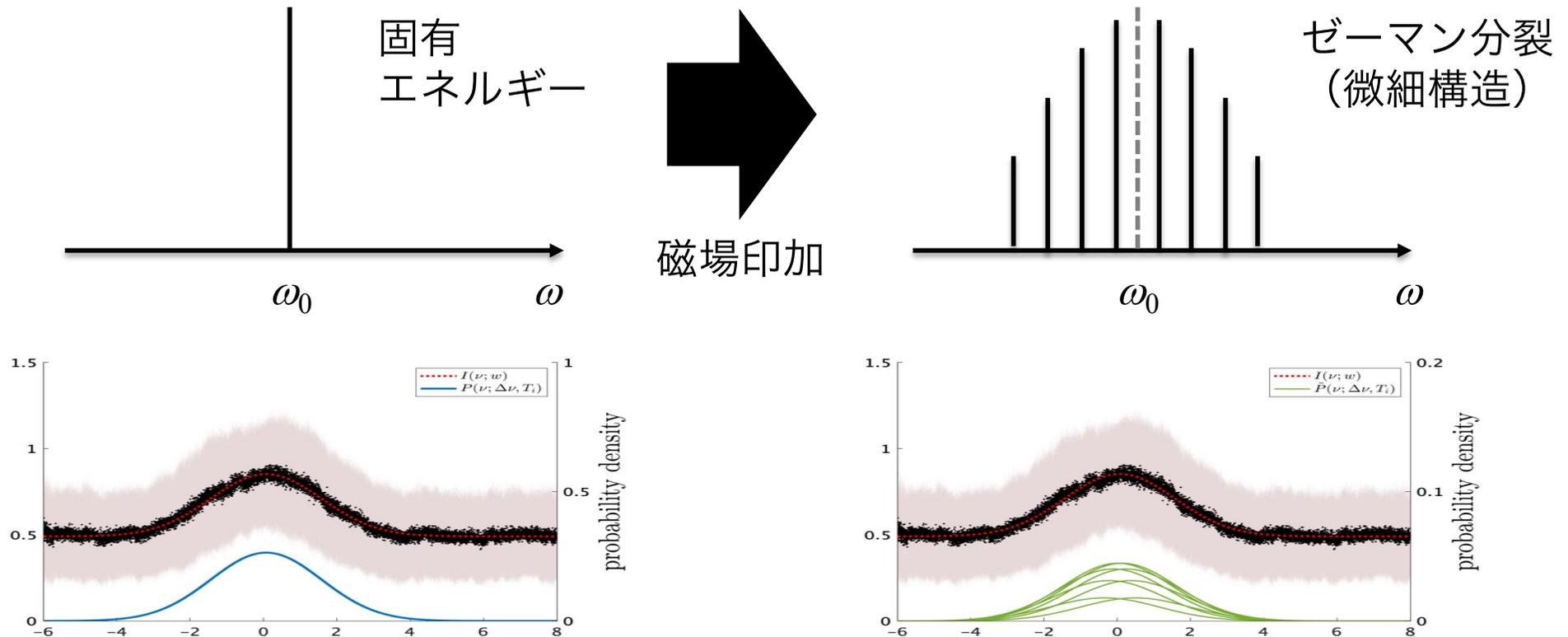
$\Delta\omega$: Δv に対応するシフト量
 $\hbar\omega_0$: 粒子の固有エネルギー

各固有エネルギーの吸収帯として速度分布関数を観測可能

内部自由度に起因するスペクトルの変化

[Boivin & Scime, *Rev. Sci. Instrum.*, 2003]

Ex. ゼーマン効果

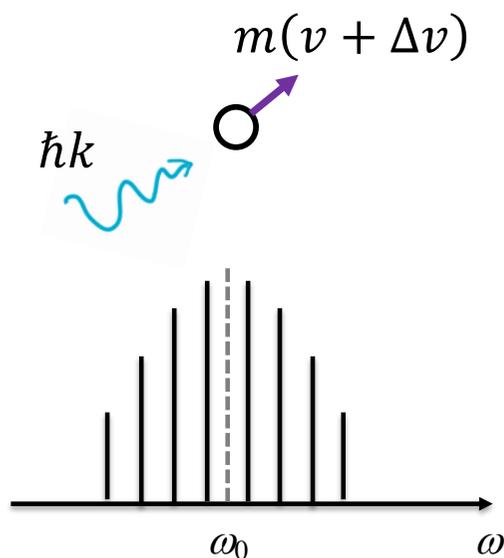


スペクトルの形状は電磁場による粒子の内部自由度の変化も反映
ただし、支配的な要因を実験的に決定することは非自明な問題

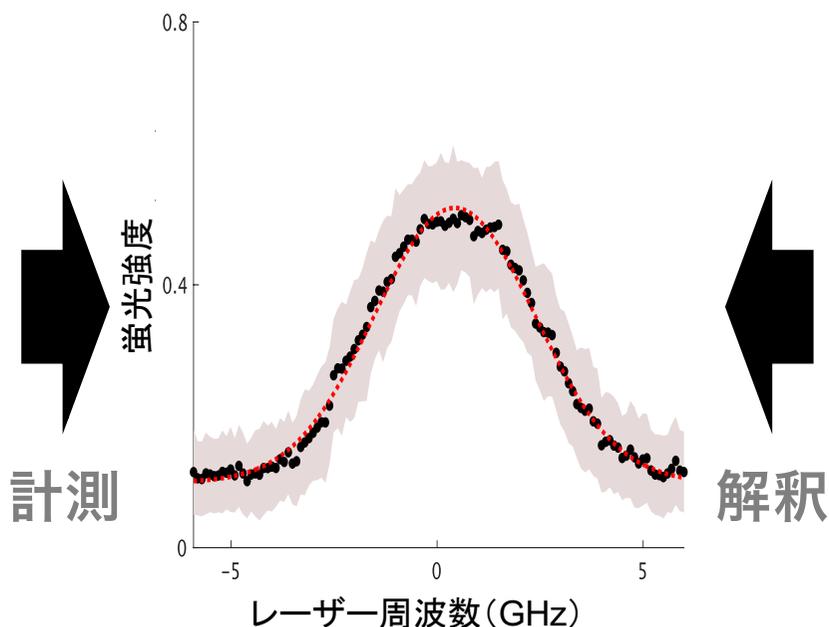
(多くの場合、物理的考察=order estimationによって「決定」)

磁化プラズマの理論と実験的観測の現状

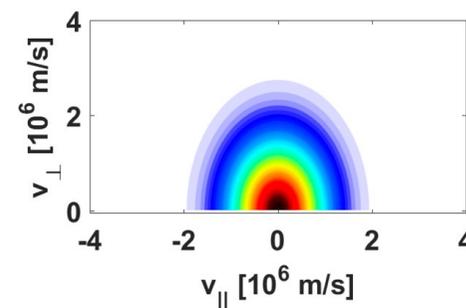
実験
(ドップラー&ゼーマン効果)



観測データ
(スペクトル)



理論
(速度分布関数)



熱電子 $T_{e,\parallel} \neq T_{e,\perp}$
熱イオン $T_{i,\parallel} \neq T_{i,\perp}$

これまで：（多くの場合）Maxwellianを仮定し、最小二乗法でフィッティング

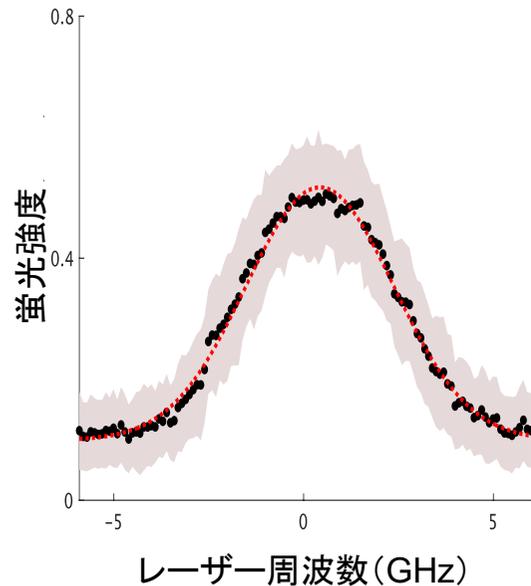


本研究：

他の速度分布関数やゼーマン効果の有無も考慮し、妥当なモデルを選択

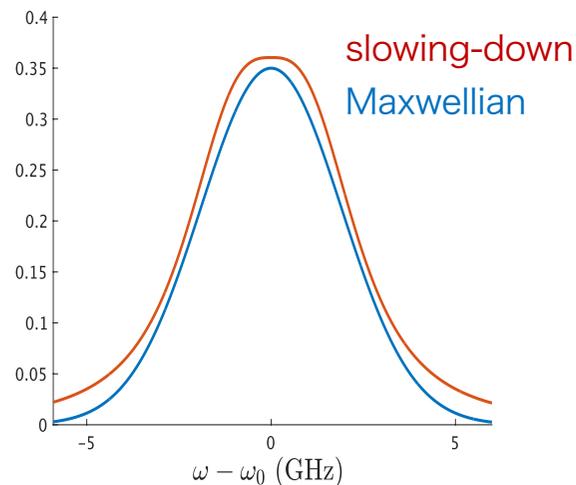
結果：イオン速度分布関数のモデル選択

[ST, et al., *Sci. Rep.*, 2021]

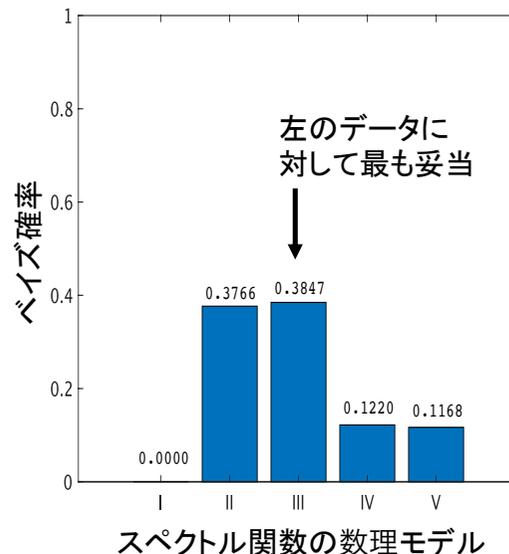


レーザー誘起蛍光法 (LIF) データを表す速度分布関数のモデルを統計的に選択する方法論を開発

- 磁化プラズマ中のArイオンのエネルギー吸収帯
対応する巨視的状态が異なる2種類の速度分布関数を候補とし、ゼーマン効果の有無も加味して選択



モデル事後確率



モデルの候補

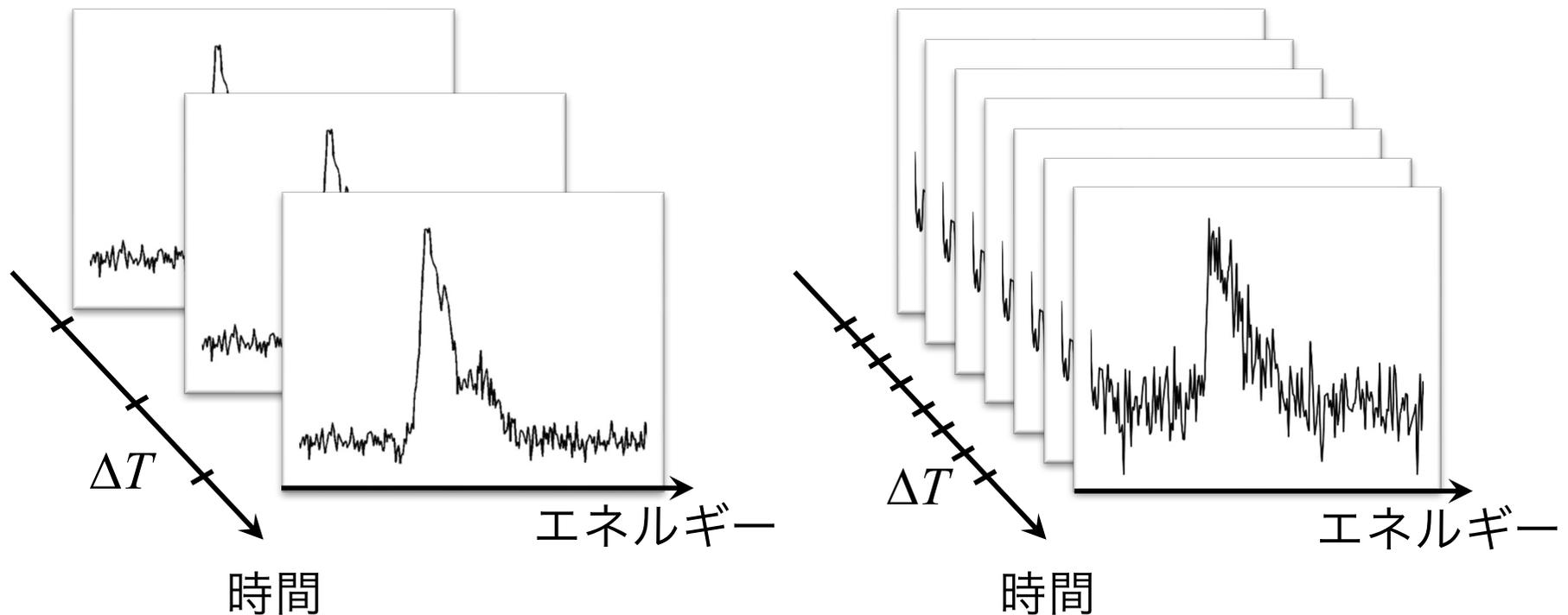
	速度分布関数	ゼーマン効果
モデル I	no ions	-
モデル II	Maxwellian	無視
モデル III	Maxwellian	考慮
モデル IV	slowing-down	無視
モデル V	slowing-down	考慮

ベイズ推定のスケーリング解析

– 計測データの質や量に対するモデル選択の依存性 –

2. ST, et al., "Intrinsic regularization effect in Bayesian nonlinear regression scaled by observed data", *Phys. Rev. Res.* 4, 043165 (2022).
 - プレスリリース：計測データの量や質に対するベイズ推定のスケーリング則を解明
 - 支援：科研費(20K19889)

背景：分解能と感度のトレードオフ



フレームレート ΔT^{-1} : 低
SN比: 高

フレームレート ΔT^{-1} : 高
SN比: 低

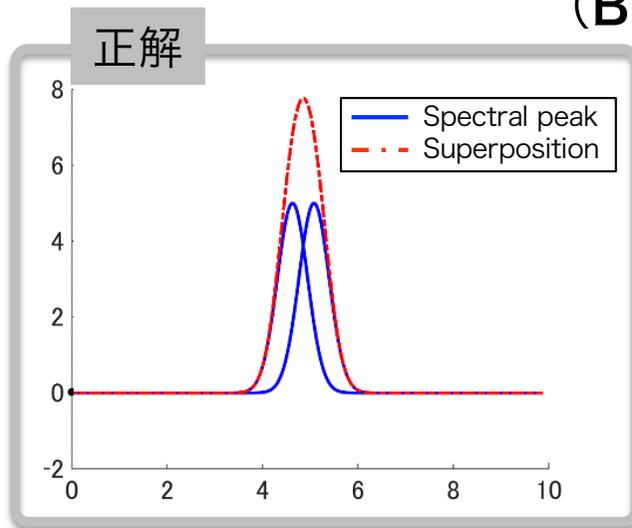
フレームレートとSN比（ノイズレベル）がトレードオフ
→ データ数（エネルギーの刻み）が多いがノイズが大きいデータ

BMSにおける「相転移現象」の謎

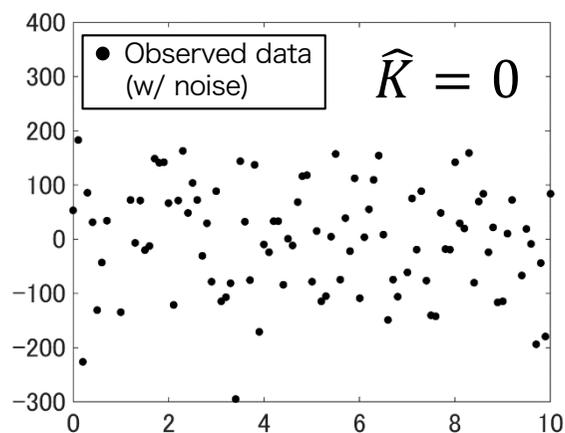
(BMS = ベイズ的モデル選択)

例) ピーク分離問題

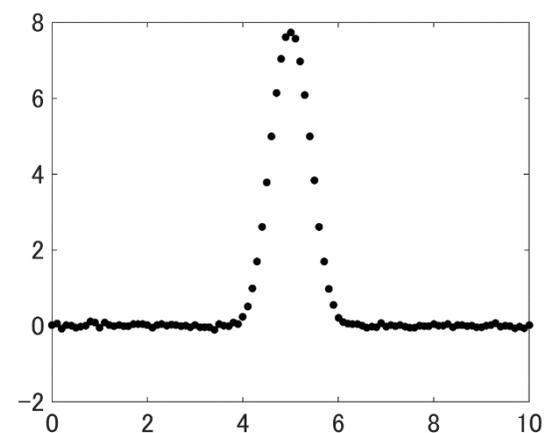
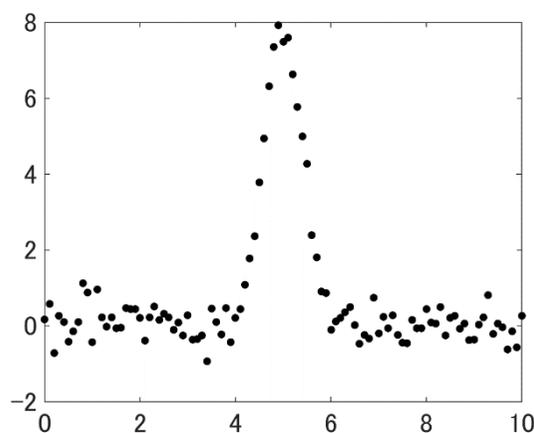
\hat{K} : BMSで選択された
スペクトルのピーク数



高 ← ノイズレベル → 低



“無情報”

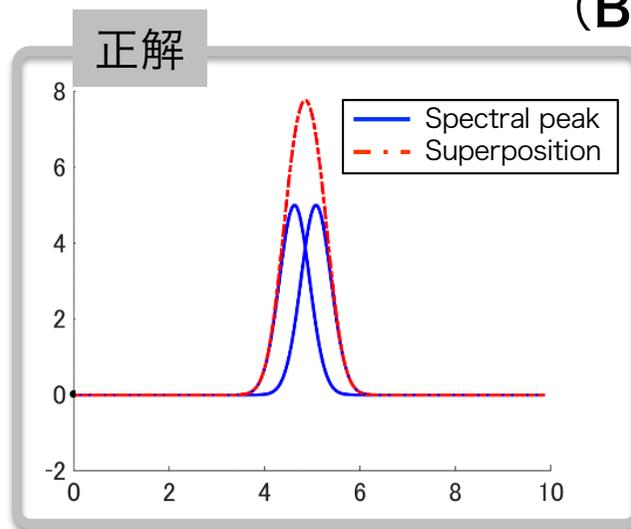


BMSにおける「相転移現象」の謎

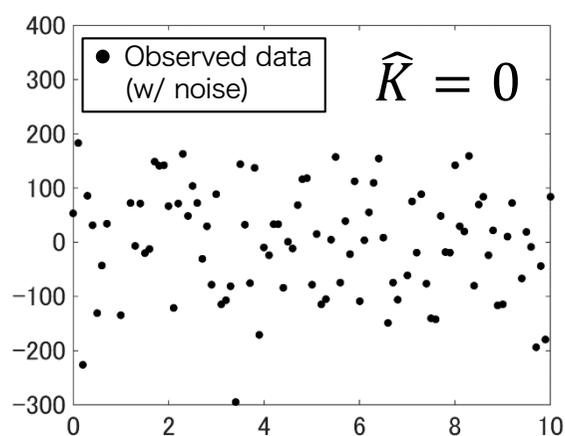
(BMS = ベイズ的モデル選択)

例) ピーク分離問題

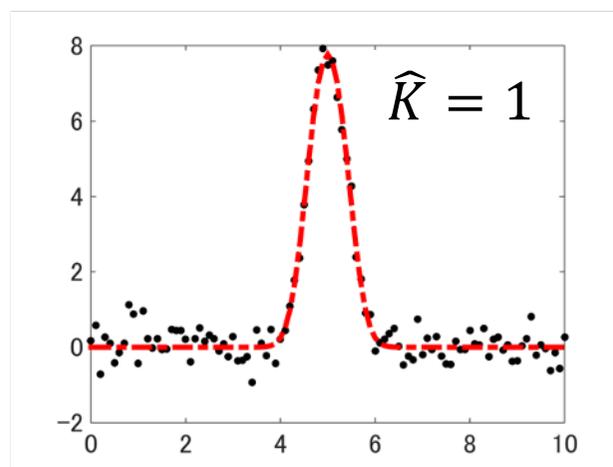
\hat{K} : BMSで選択された
スペクトルのピーク数



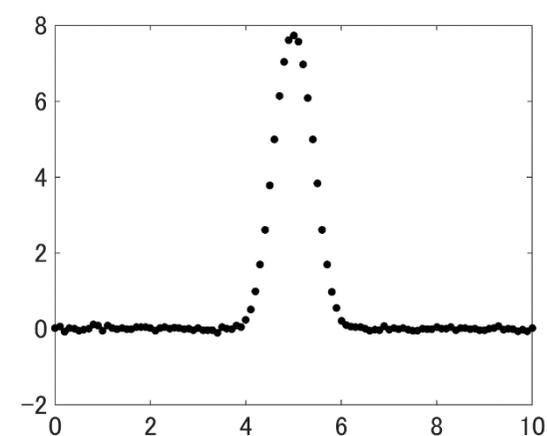
高 ← ノイズレベル → 低



“無情報”



“大域構造”

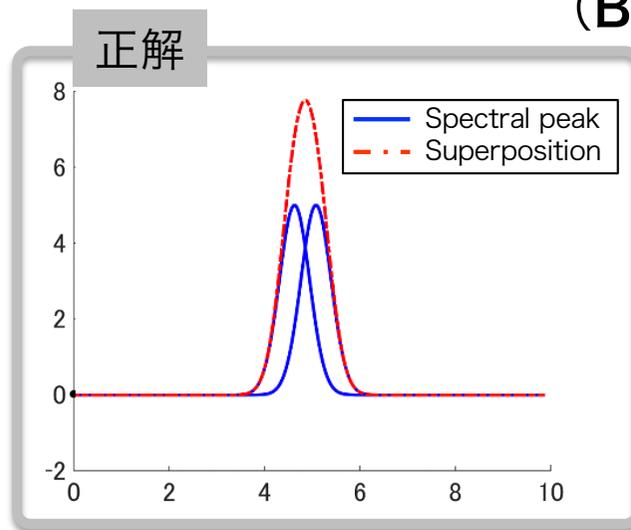


BMSにおける「相転移現象」の謎

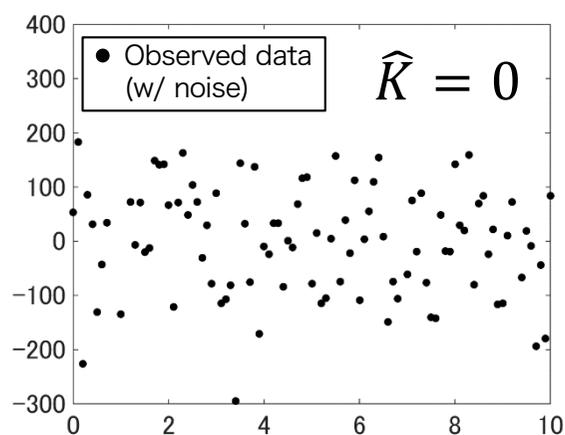
(BMS = ベイズ的モデル選択)

例) ピーク分離問題

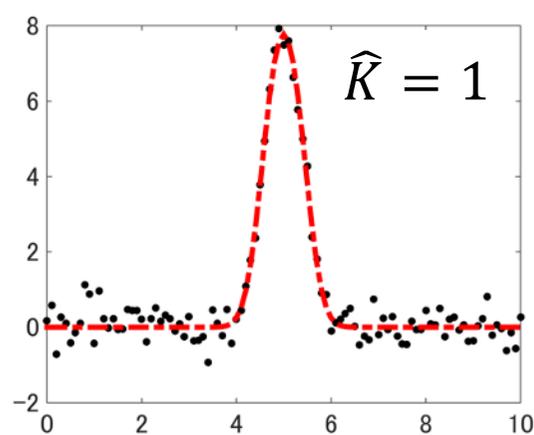
\hat{K} : BMSで選択された
スペクトルのピーク数



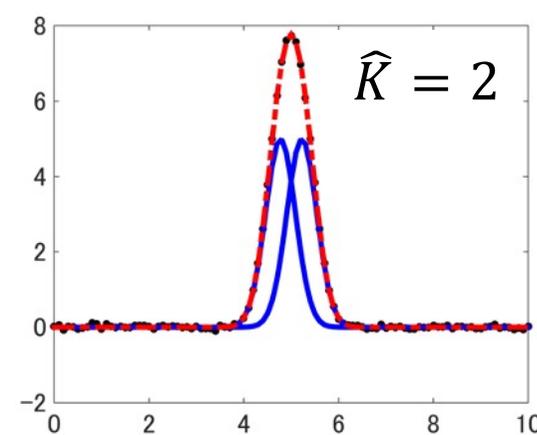
高 ← ノイズレベル → 低



“無情報”



“大域構造”



“微細構造”

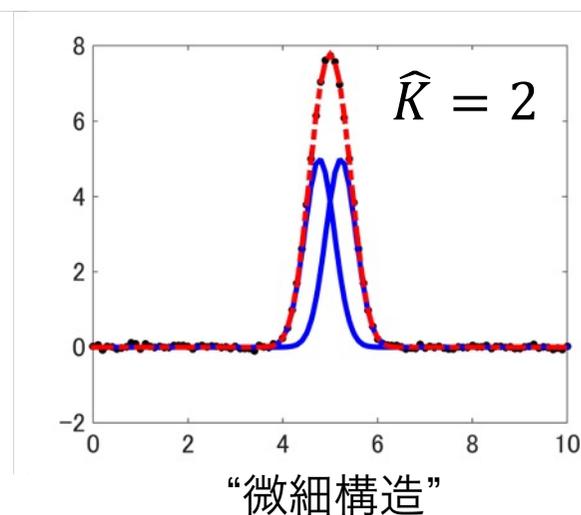
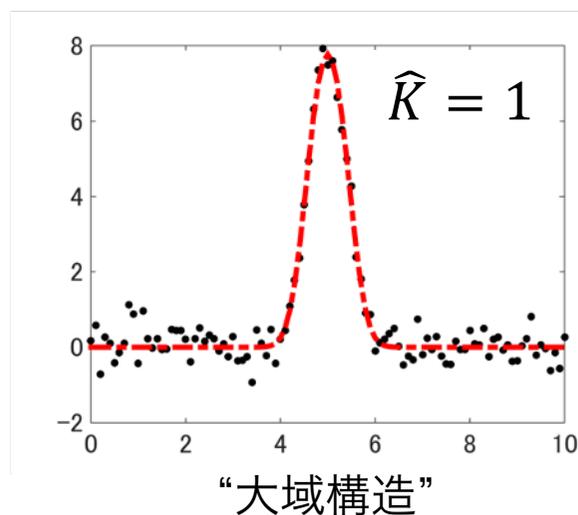
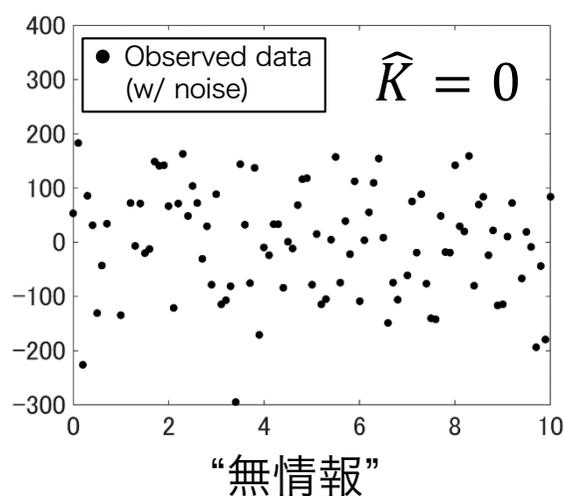
BMSにおける「相転移現象」の謎

(BMS = ベイズ的モデル選択)

計測データの質（や量）は
BMSへどのように影響するか？

BICはこのような影響を無視する近似から導出

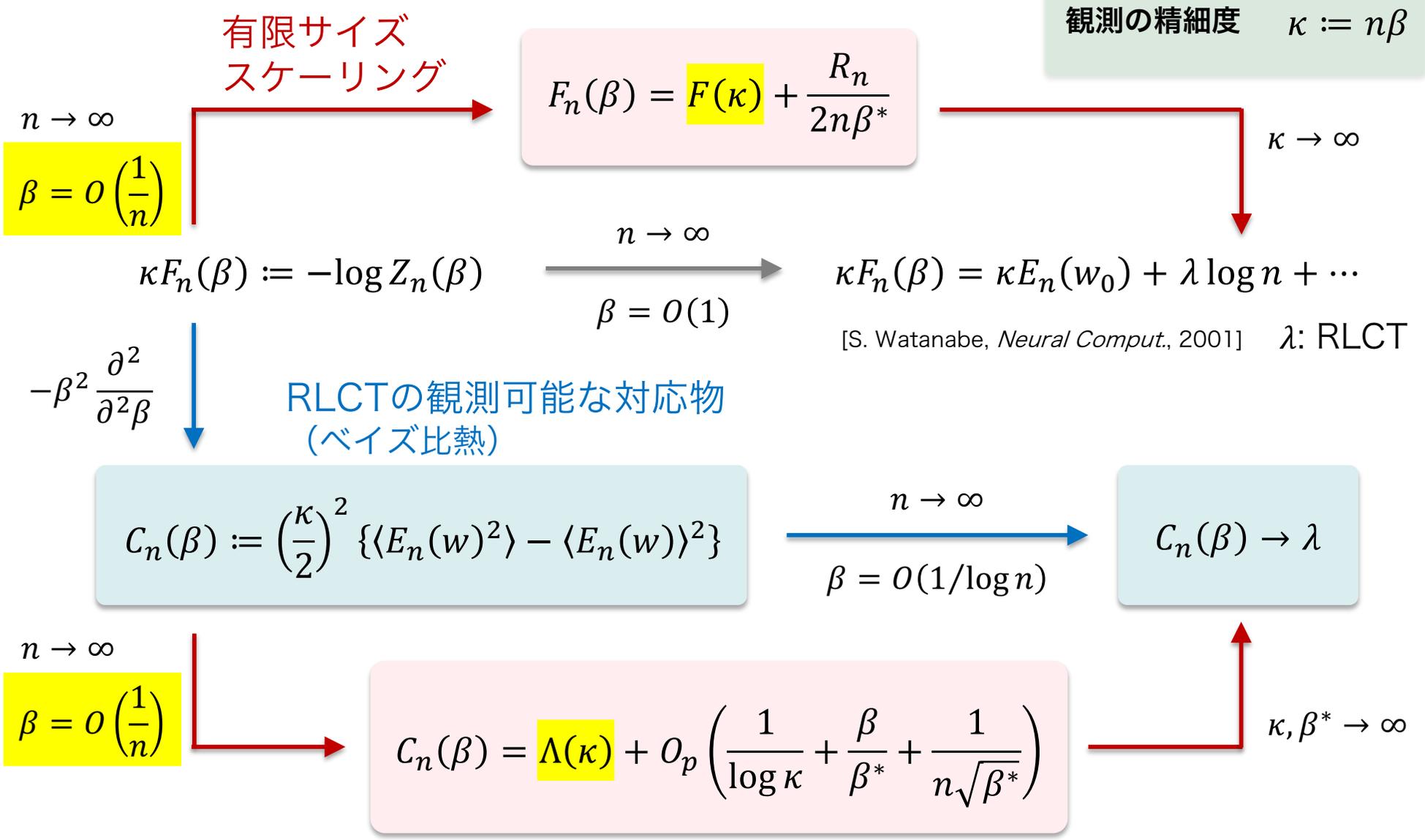
(低) ← (データの質) → (高)
高 ← ノイズレベル → 低



“比例的高ノイズレジーム”の漸近理論

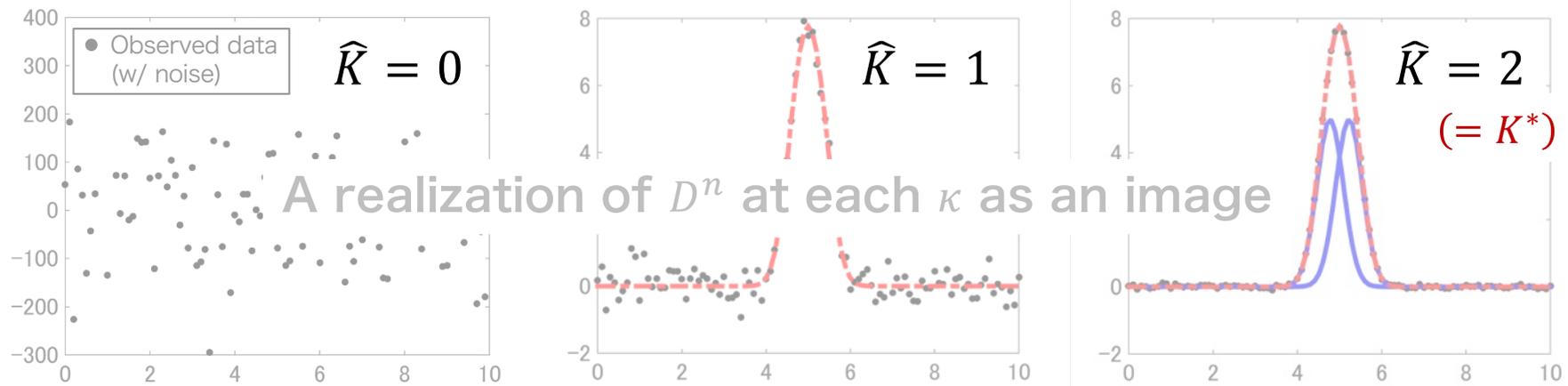
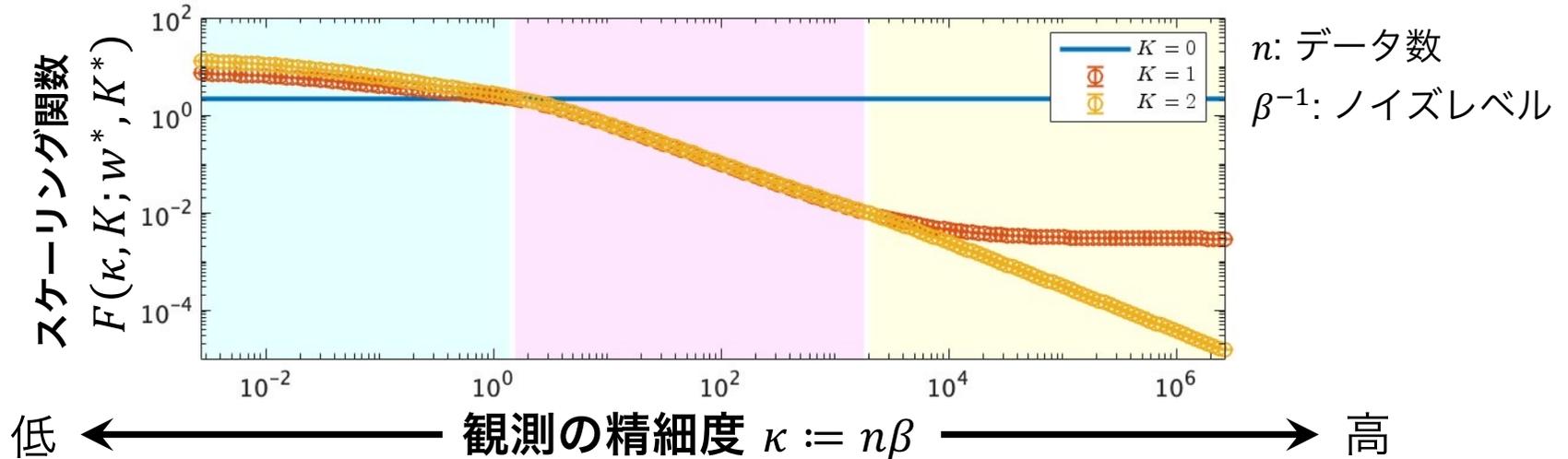
[ST et al., *Phys. Rev. Res.*, 2022]

観測の精細度 $\kappa := n\beta$



(...)*: 真の(...)

ベイズ自由エネルギーのスケーリング挙動



- BMSの解となる $F(\kappa, K; w^*, K^*)$ を最小化する \hat{K} は真値である K^* と常には一致せず、 κ のいくつかの転移点で変化
 - κ の増加に伴い、より簡素なものからより複雑なものへ選択されるモデルが変化

ガウス過程回帰の活用と発展

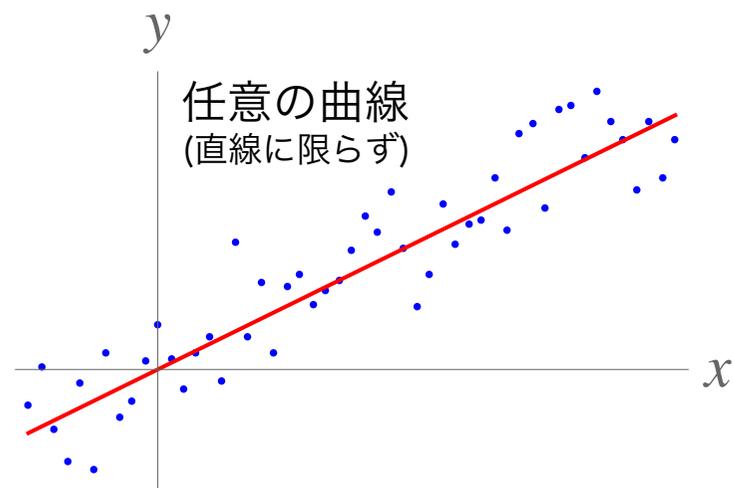
– ノンパラメトリック回帰編 –

3. **T. Nishizawa**, ST, T. Kobayashi, et al., "Estimation of plasma parameter profiles and their derivatives from linear observations by using Gaussian processes", *Plasma Phys. Control. Fusion* 65, 125006 (2023).
 - プレスリリース：機械学習を用いたプラズマ分布解析手法を開発
 - 支援：科研費(20K19889)他

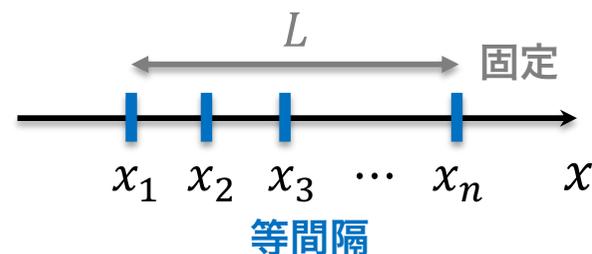
設定：加法性ガウスノイズを伴う観測

$$Y_i = f(x_i; w) + N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- $\{Y_i\}_{1:n}$: サンプル
 $Y_i = y_i$: 実現値 (計測データ)
- $x = x_i$: 計測点
 $x_i = x_{i-1} + L/(n-1)$
($L := x_n - x_1$ は固定)
- $f \in \{f_K\}$: x の任意関数
- w : f のパラメータセット
- N_i : 計測ノイズ
 $N_i \sim \mathcal{N}(0, \beta^{-1})$ ガウスノイズ
i.e., $Y_i \sim \mathcal{N}(f(x_i; w), \beta^{-1})$
 $\beta^{-1} > 0$: ノイズレベル (分散)



$Y_i | x_i$: 条件付き独立な確率変数

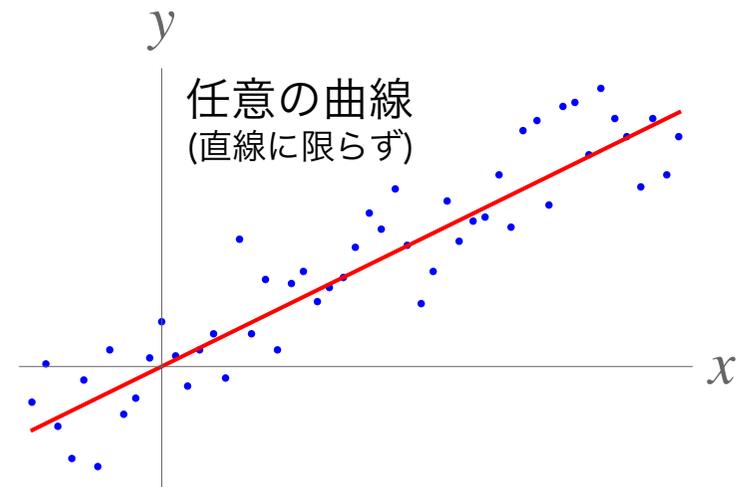


計測データはサンプル (ガウス分布に従う確率変数) の実現値

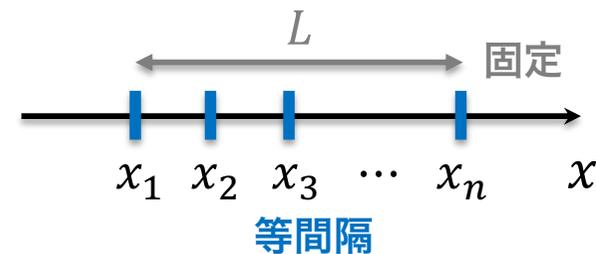
ノンパラメトリックモデル

$$Y_i = f(x_i; \underline{w}) + N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- $\{Y_i\}_{1:n}$: サンプル
 $Y_i = y_i$: 実現値 (計測データ)
- $x = x_i$: 計測点
 $x_i = x_{i-1} + L/(n-1)$
($L := x_n - x_1$ は固定)
- f : x の任意関数
- ~~w : f のパラメータセット~~
- N_i : 計測ノイズ
 $N_i \sim \mathcal{N}(0, \beta^{-1})$ ガウスノイズ
i.e., $Y_i \sim \mathcal{N}(f(x_i; \underline{w}), \beta^{-1})$
 $\beta^{-1} > 0$: ノイズレベル (分散)



$Y_i | x_i$: 条件付き独立な確率変数

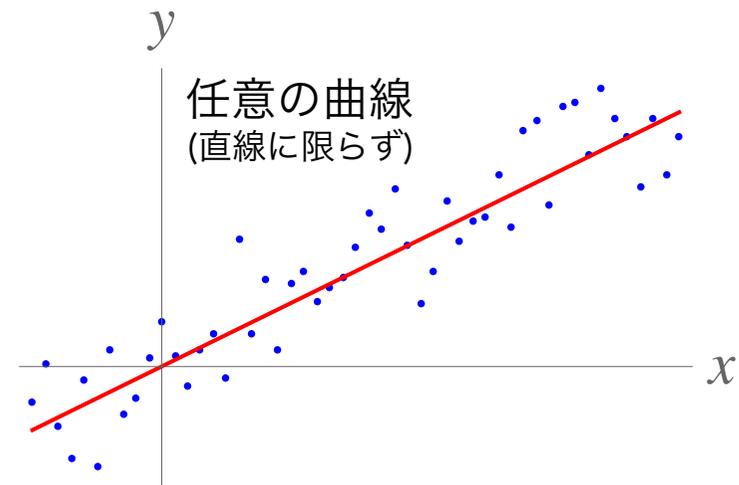


計測データはサンプル (ガウス分布に従う確率変数) の実現値

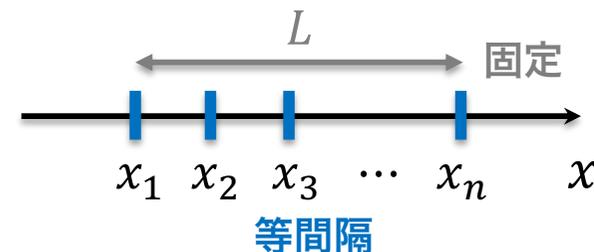
分解能を考慮したノンパラメトリックモデル

$$Y_i = \sum_j M_{ij} f(x_j) + N_i \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, m) \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

- $\{Y_i\}_{1:m}$: サンプル
 $Y_i = y_i$: 実現値 (計測データ)
- $x = x_i$: 計測点
 $x_i = x_{i-1} + L/(n-1)$
($L := x_n - x_1$ は固定)
- f : x の任意関数
- M_{ij} : 空間(または時間)分解能
- N_i : 計測ノイズ
 $N_i \sim \mathcal{N}(0, \beta^{-1})$ ガウスノイズ
i.e., $Y_i \sim \mathcal{N}(f(x_i), \beta^{-1})$
 $\beta^{-1} > 0$: ノイズレベル (分散)



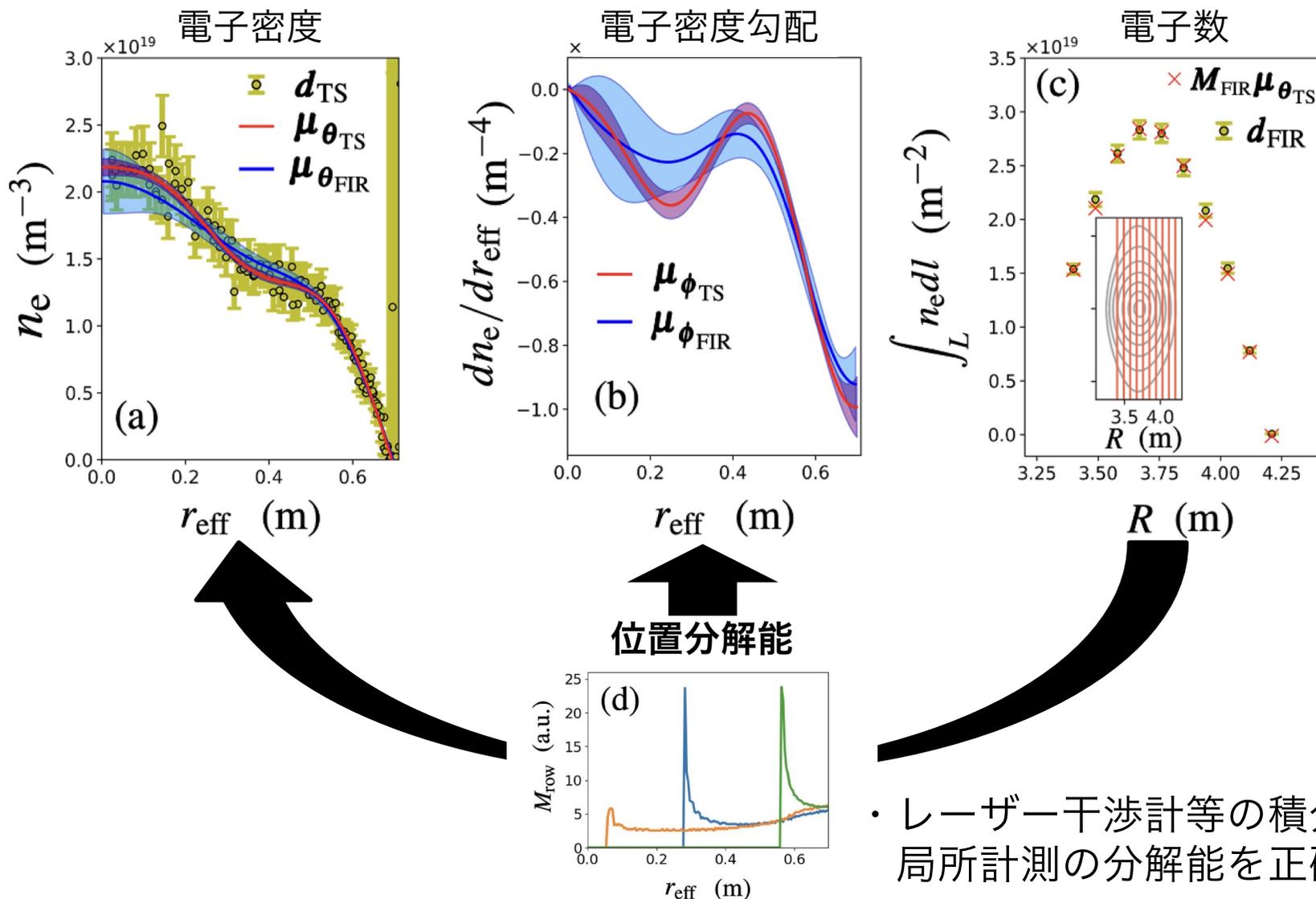
$Y_i \mid \{M_{ij}, x_j\}_{1:n}$: 条件付き独立な確率変数



計測データはサンプル (ガウス分布に従う確率変数) の実現値

結果：積分計測に基づくガウス過程回帰

[T. Nishizawa, ST, T. Kobayashi, et al., *Plasma Phys. Control. Fusion*, 2023]



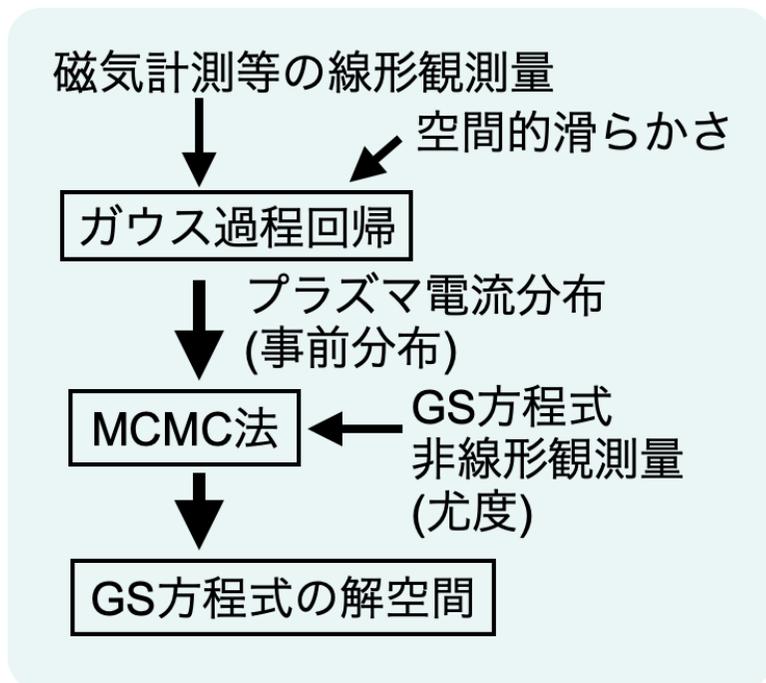
- レーザー干渉計等の積分計測や局所計測の分解能を正確に評価

発展：物理特性を考慮したガウス過程回帰

物理法則とガウス過程回帰の統合

[T. Nishizawa, ST, et al., *PPCF*, 2024]

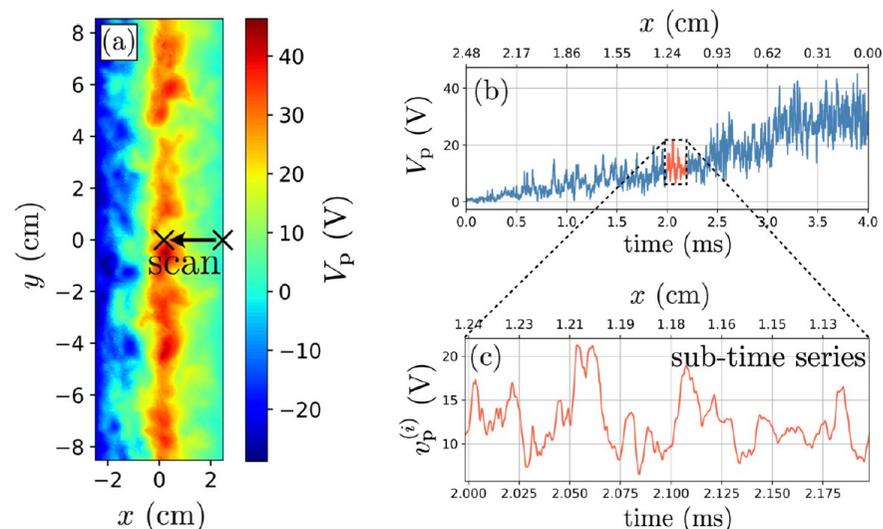
- 軸対称プラズマを考慮した拡張



プラズマ揺らぎの定量化

[T. Nishizawa, P. Manz, ST, et al., *PoP*, 2025]

- プローブ位置を移動させて空間をスキャンする計測に対して拡張

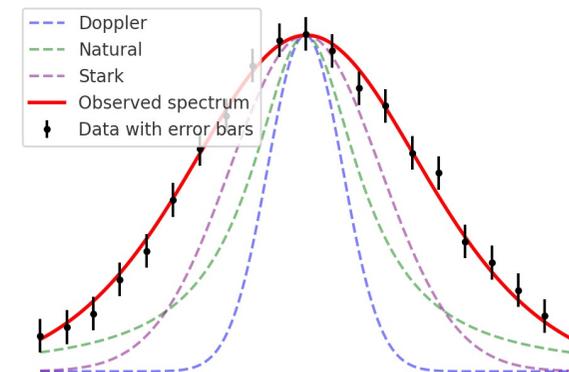
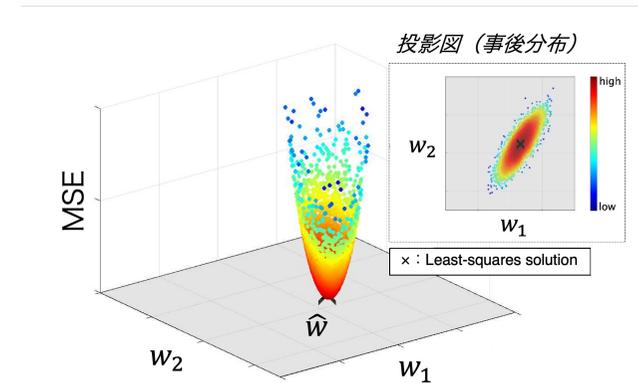


副時系列に分割し、自己相関を計算

ベイズ統計学とプラズマ物理学の架け橋

まとめ

- 統計学と物理学の関係性
 - 誤差論と統計力学
 - 認識論と存在論
 - 階層的生成モデルの回帰問題
- パラメトリックベイズ回帰
 - イオン速度分布関数のベイズ的モデル選択
 - “比例的高ノイズレジーム”の漸近理論
- ノンパラメトリックベイズ回帰
 - 観測の分解能を考慮したガウス過程回帰
 - 系の物理特性を考慮したガウス過程回帰



1. ST, et al, “Bayesian inference of ion velocity distribution function from laser-induced fluorescence spectra”, *Sci. Rep.*, 11, 20810 (2021).
2. ST, et al., "Intrinsic regularization effect in Bayesian nonlinear regression scaled by observed data", *Phys. Rev. Res.* 4, 043165 (2022).
3. T. Nishizawa, ST, T. Kobayashi, et al., "Estimation of plasma parameter profiles and their derivatives from linear observations by using Gaussian processes", *Plasma Phys. Control. Fusion* 65, 125006 (2023).